

الباب السادس

مقدمة في الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية

تعريف أساسية

التجربة العشوائية:

أي إجراء تعلم مسبقا جميع النواتج الممكنة له، وإن كنا لا نستطيع أن نتنبأ بأي من هذه النتائج سيتحقق فعلا.

فراغ العينة (S):

المجموعة المكونة من النتائج الممكنة من تجربة عشوائية.

عند القاء قطعة نقود مرة واحدة فما هو فراغ العينة؟

عند القاء قطعتي نقود مرة واحدة فما هو فراغ العينة؟

عند القاء زهرة نرد مرة واحدة فما هو فراغ العينة؟

الحادثة:

مجموعة جزئية من فراغ العينة.

١- الحادثة البسيطة:

وهي الحادثة التي تكون من عنصر واحد من فراغ العينة.
اما الحادثة المركبة: تحتوي على أكثر من عنصر من فراغ العينة.

نوع الحادثة	وصفها	الحادثة
بسيطة	حادثة تمثل ظهور كتابتين	$A_1 = \{TT\}$
بسيطة	حادثة تمثل ظهور صورتين	$A_2 = \{HH\}$
مركبة	حادثة تمثل ظهور وجهين متشابهين	$A_3 = \{HH, TT\}$
مركبة	حادثة تمثل ظهور صورة واحدة على الأقل	$A_4 = \{HH, HT, TH\}$

٢- الحادثة المؤكدة:

هي الحادثة التي لا بد من وقوعها.

مثال:

عند اللقاء زهرة نرد مرة واحدة ، فإن الحادثة المؤكدة هي ظهور أي وجه من ١ الى ٦

٣- الحادثة المستحيلة:

عندما لا يكون هناك نواتج متعلقة بالحادثة المذكورة.

مثال:

عند لقاء زهرة نرد مرة واحدة ، فإن الحادثة المستحيلة هي ظهور عدد فردي وعدد يقبل القسمة على ٢ في آن واحد.

٤- الحوادث المتماثلة:

الحوادث التي يكون لها نفس الفرص في الظهور.

مثال:

عند القاء قطعة نقود مرة واحدة فإن فرص ظهور الكتابة تعادل فرص ظهور الصورة.

٥- الاحداث المتنافية:

اذا كان وقوع الحادثين معا حدثا مستحيلا.

مثال:

عند القاء قطعة نقود فإن حدث ظهور الكتابة يمنع ظهور الصورة.

٦- الاحداث المستقلة:

أن وقوع حدثين لا يؤثر أحدهما على الآخر.

مثال:

عند القاء قطعتي نرد فإن ظهور رقم على النرد الأول لا يؤثر على النرد الثاني.

طرق العد (التوافيق):

$$C_x^n = \frac{n!}{x! (n - x)!}$$

بكم طريقة يمكن اختيار رجلين من بين أربع رجال؟

ملاحظات هامة

$$a^0 = 1$$

$$0! = 1$$

$$C_x^n = 1$$

$$C_n^n = 1$$

تعريف الاحتمال

■ التعريف التقليدي (الكلاسيكي) للاحتمال:

إذا كان عدد الطرق التي يمكن أن تظهر نتائج تجربة هي n ، وكان من بينها m طريقة تظهر بها حادثة ما .

فإن احتمال وقوع حادثة هو: $P(A) = \frac{m}{n}$

عدد عناصر الحدث
عدد فراغ العينة

مثال:

إذا كانت لديك عشر بطاقات مرقمة من الرقم (1) حتى (10) موضوعة على طاولة بشكل عشوائى ومقلوبة، ثم سحبت إحدى هذه البطاقات

ما احتمال الحصول على بطاقة تحمل الرقم (4)؟

ما احتمال الحصول على بطاقة تحمل رقم يقبل القسمة على (3)؟

مثال:

ألقيت زهرة نرد متزنة مرة واحدة فما احتمال ظهور:

أ. عدد فردي؟

ب. عدد زوجي؟

ج. عدد أقل من الوجه ؟

د. عدد أكبر من الوجه ؟

في اختيار متعدد الاختيارات، اذا كان لكل سؤال أربع خيارات ما احتمال أن يختار الطالب الإجابة الصحيحة؟

مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية، من كل (1000) مصباح منتج يوجد (50) مصباح تالف ، اخترنا مصباح عشوائي:

١- ما احتمال أن يكون المصباح تالف

٢- ما احتمال أن يكون المصباح صالح

ملاحظات هامة

✓ من الملاحظ والذي يمكن أن نستنتجه أن احتمال أي حادثة A لا يزيد عن الواحد الصحيح عندما يكون الحدث مؤكداً ولا يقل عن الصفر عندما يكون الحدث مستحيلاً كما أن النسبة $\frac{m}{n}$ هي خارج قسمة عددين غير سالبين هما m, n بحيث $m \leq n$ وعلى ذلك فإن:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

ملاحظات هامة

احتمال أي حدث محصور بين ١ و الصفر،

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

احتمال أي حادثة مؤكدة يساوي ١.

$$P(S) = 1$$

احتمال أي حادثة مستحيلة يساوي صفر.

$$P(\phi) = 0$$

بعض قوانين الاحتمالات

■ الحادثة المكملة:

مجموع احتمال حدوث حادثة واحتمال عدم حدوثها يساوي واحد

$$1 - p(A)$$

إذا كان احتمال نجاح عملية تصحيح النظر هو 85% ، فما هو احتمال عدم نجاحها؟

بعض قوانىن الاحتمالات

■ الاحداث المانعة:

$$P (A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$$

■ الاحداث غير المانعة:

$$P (A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$$

ألقيت زهرة نرد مرة واحدة، ما احتمال ظهور الرقم ٢ أو عدد فردي:

ألقيت زهرة نرد ، ما احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على ٢ أو ٣:

ألقيت زهرة نرد ما احتمال ظهور عد زوجي أو عدد أكبر من ٢:

في عينة مكونة من 100 طالب من كلية الاقتصاد والإدارة فكان منهم من يدرس دورات تدريبية، فُوجد 20 طالباً يدرسون لغة إنجليزية وحاسب آلي و 40 طالباً يدرسون حاسب آلي فقط و 25 طالباً يدرسون لغة إنجليزية فقط.

اختير طالب عشوائياً، أوجد الاحتمالات الآتية:

احتمال أن يدرس الطالب حاسب آلي (C).

احتمال أن يدرس الطالب لغة إنجليزية (E).

احتمال أن يدرس الطالب المادتين معاً.

احتمال أن يدرس الطالب حاسب آلي أو لغة إنجليزية.

احتمال أن لا يدرس الطالب أيّاً من المادتين.

وَجُد في أحد النوادي الرياضية القريبة من الجامعة 50 طالباً من جامعة الملك عبد العزيز منهم 20 طالباً من كلية الاقتصاد والإدارة و 25 طالباً من كلية الآداب والباقي من كليات أخرى .
أختير منهم طالباً عشوائياً أوجد الاحتمالات الآتية:

احتمال أن يكون الطالب من كلية الاقتصاد والإدارة؟

احتمال أن يكون الطالب من كلية الآداب؟

احتمال أن يكون الطالب من كلية الاقتصاد والإدارة أو من كلية الآداب؟

احتمال أن يكون الطالب من كلية أخرى؟

أمثلة متنوعة فى الاحتمالات

الدورة - النتيجة	حصلت على دورة A1	لم تحصل على دورة A2	المجموع
ناجحة	120	80	200
راسبة	30	70	100
المجموع	150	150	300

ما احتمال أن تكون الطالبة ناجحة:

ما احتمال أن تكون حاصلة على دورة:

ما احتمال أن تكون ناجحة ومن الحاصلات على دورة:

إحصاء ١١١ - تحضيرى أدبى

- ١) أختيرت طالبة عشوائياً فما احتمال أن تكون:
أ. من كلية الآداب؟
ب. ممتازة؟
ت. غير ضعيفة؟
ث. من غير كلية العلوم؟
ج. من كلية العلوم وممتازة؟
ح. من كلية العلوم أو ممتازة؟

المجموع	اقتصاد (c)	علوم (s)	الآداب (m)	الكلية المستوى
180	70	50	60	ممتاز (e)
75	20	30	25	جيد (g)
45	10	20	15	ضعيف (b)
300	100	100	100	المجموع

ألقىت زهرة نرد ، ما احتمال:

١- أن يكون السطح العلوي أقل من ٣:

٢- أن يكون السطح العلوي ٤ فأكثر:

المتغير العشوائى:

هو المقدار الذى يأخذ قىما رقمية مختلفة والذى تعبر عن نتائج التجربة العشوائية.

أقسام المتغير العشوائى	
متغير متصل (متصل)	متغير منفصل (متقطع)
يأخذ قىم صحيحة وكسرية فى مدى تغيره.	يأخذ قسم تنتمى الى مجموعة محدودة أو معدودة.
مثل: الأسعار المختلفة أجور العمال	مثل: عدد الأسهم عدد حوادث السيارات

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

X	1	2	3	4	5	6
P(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

شروط التوزيع الاحتمالي:

$$p(x) \geq 0$$

$$\sum P(x) = 1$$

خصائص أساسية للتوزيع الاحتمالي المنفصل

١ / توقع التوزيع (التوقع الرياضي أو متوسط التوزيع):

$$E(X) = \mu = \sum x P(x)$$

٢ / تباين التوزيع:

$$\text{var}(X) = \sigma^2 = \sum x^2 P(x) - \mu^2$$

٣ / الإنحراف المعياري:

$$\sqrt{\text{var}(X)} = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

إذا كان التوزيع الاحتمالي المنفصل لمتغير X هو كالتالي:

X	1	2	3	4
$P(x)$	k	0.2	0.6	0.1

أ- ما هي قيمة الثابت (k) المناسبة؟

ب- أوجد متوسط وتباين التوزيع؟

X	1	2	3	4
P(x)	k	0.2	0.6	0.1

التوزىعات الاحتمالية ذى الحدىن

$$C_x^n p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

مواصفات توزيع ذي الحدين :

توزيع منفصل يستخدم في حالة الاحداث المستقلة ويتوقف على قيمة الاحتمال

$$\sum P(x) = \sum C_x^n p^x q^{n-x} = 1$$

حيث:

$$p + q = 1$$

خصائص توزيع ذي الحدين

$$\mu = np \quad \text{المتوسط}$$

$$\sigma^2 = npq \quad \text{التباين}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} \quad \text{الانحراف المعياري}$$

إذا كان لديك التوزيع الاحتمالي التالي:

$$p(x) = C_x^3 (0.25)^x (0.75)^{3-x}$$

احسبي ($P(x) \leq 1$)

إذا علمت أن x يتبع توزيع ذو حدين ($n=15$, $p= 0.65$)
فإن التباين هو:

إذا كانت الدالة توزيع ذو حدين:

$$p(x) = C_x^8 (0.20)^x (0.8)^{8-x}$$

فإن الانحراف هو:

6 - 8 - 1 اختر الإجابة المناسبة للفقرات التالية :

1. قيمة الاحتمال تتراوح بين

A. <u>(0, 1)</u>	B. (-1, 1)	C. (-2, 2)	D. (0, 2)
------------------	------------	------------	-----------

2. تعتبر حادثة ظهور عدد يقبل القسمة على 5 عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة من الحوادث

$\{2, 3, 4, 5, 6\}$

A. <u>بسيطة</u>	B. مركبة	C. مؤكدة	D. B و A
-----------------	----------	----------	----------

3. إلقاء قطعة نقود وزهرة نرد مرة واحدة مثال على

A. فراغ عينة	B. حادثة \times	C. <u>تجربة عشوائية</u>	D. تجربة غير عشوائية
--------------	-------------------	-------------------------	----------------------

4. عدد الزلازل السنوي بإحدى الدول مثال على المتغيرات العشوائية

A. <u>المنفصلة</u>	B. المتصلة	C. المتحيزة	D. B و A
--------------------	------------	-------------	----------

5. من شروط التوزيع الاحتمالي المنفصل

A. <u>$\sum P(x) = 1$</u>	B. <u>$0 \leq P(x) \leq 1$</u>	C. $-1 \leq P(x) \leq 1$	D. B و A
---	--	-----------------------------	-------------

6 - 8 - 2 إذا تم إلقاء زهرة نرد مرة واحدة فإن

6. عدد عناصر فراغ العينة

A. 12	B. <u>6</u>	C. 2	D. 24
----------	----------------	---------	----------

7. احتمال ظهور عدد زوجي

A. 0.1	B. 0.25	C. <u>0.5</u>	D. 0.75
-----------	------------	------------------	------------

8. احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على 3

A.	0.33	B.	0.17	C.	0.83	D.	1.0
-----------	------	-----------	------	-----------	------	-----------	-----

6 - 8 - 3 إذا كانت لديك التوزيع الاحتمالي المنفصل التالي:

X	-1	0	1
P(X)	0.25	k	0.25

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

9. قيمة الثابت (k)

A.	0.25	B.	1.00	C.	0.75	D.	0.5
-----------	------	-----------	------	-----------	------	-----------	-----

10. متوسط التوزيع

A.	0	B.	1	C.	2	D.	3
-----------	---	-----------	---	-----------	---	-----------	---